Chapitre 2

APPLICATIONS LINEAIRES

2.1 Application linéaire

Définition

Etant donné $(E,+,\cdot)$, $(F,+,\cdot)$ deux $K-$espaces vectoriels, une application f de E dans F, est dite *application linéaire* si et seulementsi :

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{1.}\forall u,v\in E:\ \ f(u+v)=f(u)+f(v)\\ \mathbf{2.}\forall u\in E;\ \forall\lambda\in K:\ \ f(\lambda u)=\lambda f(u)\end{array}}$$

L'ensemble des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est noté $\boldsymbol{L}(E,F)$.

Définition équivalente

Etant donné $(E,+,\cdot)$, $(F,+,\cdot)$ deux $K-$espaces vectoriels, une application f de E dans F, est dite *application linéaire* si et seulement si :

$$\boxed{\forall u,v\in E;\ \forall\lambda,\beta\in K:f(\lambda u+\beta v)=\lambda f(u)+\beta f(v)}$$

Remarque

Dans la définition, on a noté '+' et '·' les lois de compositions sur E et sur F. Il faut prendre garde au fait que les ensembles E et F contiennent des objets à priori différents, et

que les opérations sur ces objets différents n'ont à priori pas de rapport. Il est utile de se demander de quelle loi il s'agit quand on lit la définition ci-dessus.

Proposition

Soit f une application linéaire de E dans F.

1. $f(0_E) = 0_F$

2. $\forall u \in E, \quad f(-u) = -f(u)$.

Preuve

On a,

1. $f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E) \Longrightarrow f(0_E) = 0_F$.

2. $f(-u) + f(u) = f(-u + u) = f(0_E) = 0_F \Longrightarrow f(-u) = -f(u)$.

Exemples

1. L'application

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & u = (x, y) & \to & f(u) = f(x, y) = 2x - y \end{array}$$

est une application linéaire, car :

a. Pour tout $u = (x, y), v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$:

On a

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f((x, y) + (x', y')) \\ &= f(x + x', y + y') \\ &= 2(x + x') - (y + y') \\ &= (2x - y) + (2x' - y') \\ &= f(u) + f(v) \end{aligned}$$

b. Pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \lambda \in K$

On a

$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= f(\lambda(x,y)) \\ &= f(\lambda x, \lambda y) \\ &= 2(\lambda x) - (\lambda y) \\ &= \lambda(2x - y) \\ &= \lambda f(u) \end{aligned}$$

2. L'application

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^2 \quad & \rightarrow \quad \mathbb{R} \\ u = (x,y) \quad & \rightarrow \quad f(u) = f(x,y) = 2x - 3 \end{aligned}$$

n'est pas une application linéaire, car : $f(0_{\mathbb{R}^2}) = -3 \neq 0_{\mathbb{R}}$

Remarques

1. La somme de deux applications linéaires est une application linéaire

2. Le produit d'une application linéaire par un scalaire est une application linéaire.

3. La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

2.2 Image et noyau d'une application linéaire

2.2.1 Image d'une application linéaire

Définition

Etant donnée $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire

L'image de f est le sous-ensemble de F constitué des images par f des éléments de E. On le note

$$\boxed{Imf = \{f(u); u \in E\}}$$

Autrement dit

$$\boxed{(v \in Imf) \Leftrightarrow (\exists u \in E; \quad v = f(u))}$$

Remarque

Une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est *surjective* $\Longleftrightarrow (Imf = F)$.

Preuve

La caractérisation de la surjectivité est une simple traduction des définitions.

Proposition

L'image de f (Imf) est un sous-espace vectoriel de F.

Preuve.

1. On a $0_F \in Imf$ car $f(0_E) = 0_F$.

2. Si $v_1, v_2 \in Imf$ alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, on a

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 &= \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) \\ &= f(\lambda_1 u_1) + f(\lambda_2 u_2) \\ &= f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \end{aligned}$$

ce qui prouve que Imf est stable par combinaison linéaire.

Exemple

L'application linéaire

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & u = (x, y, z) & \to & f(u) = f(x, y, z) = (2y + z, 2x + z, x - y) \end{array}$$

1. Déterminer son image.

2. L'application f est-elle surjective ?

Solution

1.

$$\begin{aligned} Imf = \; & \{f(u); u \in \mathbb{R}^3\} \\ & = \{f(x,y,z); (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ & = \{(2y+z, 2x+z, x-y)\,; (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ & = \{(0,2x,x) + (2y,0,-y) + (z,z,0)\,; (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ & = \left\{ x\overbrace{(0,2,1)}^{v_1} + y\overbrace{(2,0,-1)}^{v_2} + z\overbrace{(1,1,0)}^{v_3}; (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \end{aligned}$$

2. C'est facile de vérifier que v_1, v_2, v_3 sont liés donc $\dim(Imf) \prec 3$, ce qui prouve que $Imf \neq \mathbb{R}^3$, et f n'est pas surjective.

2.2.2 Noyau d'une application linéaire

Définition

Etant donnée $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire

Le noyau de f est le sous-ensemble de E constitué des images réciproques du vecteur nul de l'espace F $[f^{-1}\{0_F\}]$.

On le note

$$\boxed{\ker f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{u \in E; f(u) = 0_F\}}$$

Autrement dit

$$\boxed{(u \in \ker f) \Leftrightarrow (f(u) = 0_F)}$$

La notation (ker) vient de l'allemand, où noyau se dit «*Kern*»

Remarque

Une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est *injective* $\Longleftrightarrow$ $(\ker f = \{0_E\})$.

Preuve

Supposons f injective. Si $u \in \ker f$ on a $f(u) = 0_F = f(0_E)$, donc $u = 0_E$.

Réciproquement,

Supposons que $\ker f = \{0_E\}$. Si $f(u_1) = f(u_2)$, on a $f(u_1 - u_2) = f(u_1) - f(u_2) = 0_F$. Donc $u_1 - u_2 \in \ker f$, i.e. $u_1 = u_2$.

Proposition

Le noyau de f $(\ker f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve.

1. On a $0_E \in \ker f$ car $f(0_E) = 0_F$.

2. Si $u_1, u_2 \in \ker f$ alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, on a

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) &= \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) \\ &= 0_F + 0_F \\ &= 0_F \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\ker f$ est stable par combinaison linéaire.

Exemple

L'application linéaire

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & u = (x, y, z) & \rightarrow & f(u) = f(x, y, z) = (2y + z, 2x + z, x - y) \end{array}$$

1. Déterminer son noyau.

2. L'application f est-elle injective ?

Solution

1. On a $(x, y, z) \in \ker f$ si et seulement si $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ c'est à dire

$$\begin{cases} 2y + z = 0 & .... \quad (1) \\ 2x + z = 0 & .... \quad (2) \\ x - y = 0 & .... \quad (3) \end{cases}$$

2. De la troisième équation, on obtient $x = y$, on substitue dans l'équation (2), on obtient $2y + z = 0$, d'òu $z = -2y$ donc $\ker f = \{(y, y, -2y)/y \in \mathbb{R}\} \neq \{(0, 0, 0)\}$

$\ker f$ n'est pas réduit au vecteur nul, et f n'est pas injective.

2.3 Rang d'une application. Theorème du rang

Définition

Soient E, F deux K-espaces de dimension finie et $f \in \boldsymbol{L}(E, F)$. On appelle *rang* de f et on note $rg(f)$; l'entier naturel défini par :

$$\boxed{rg(f) = \dim(Imf)}$$

Théorème du rang

Toute application linéaire $f : E \longrightarrow F$ depuis un espace vectoriel E de dimension finie vérifie

$$\boxed{\boxed{\dim E = \dim \ker f + rg\ f} = \boxed{\dim E = \dim \ker f + \dim(Imf)}}$$

Exemple

Soit l'application linéaire f définie par

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & P & \to & f(P) = (P(0), P(2)) \end{array}$$

Déterminer le rang de f.

Preuve

On utilise le *Théorème du Rang*,

$$\ker f = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / \quad f(P) = 0\}$$

$$\ker f = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / \quad (P(0), P(2)) = (0,0)\}$$

$$\ker f = \{P = aX^2 + bX + c / \quad (P(0), P(2)) = (0,0)\}$$

$$\ker f = \{P = aX^2 + bX + c / \quad (c, 4a + 2b + c) = (0,0)\}$$

$$\ker f = \left\{ P = aX^2 + bX + c / \quad \begin{cases} c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \right\}$$

$$\ker f = \left\{ P = aX^2 + bX + c / \quad \begin{cases} c = 0 \\ b = -2a \end{cases} \right\}$$

$$\ker f = \{aX^2 - 2aX \quad / \quad a \in \mathbb{R}\}$$

$$\ker f = \{a(X^2 - 2X) \quad / \quad a \in \mathbb{R}\} \Longrightarrow \dim(\ker f) = 1$$

D'après le théorème du Rang,

$$\dim \mathbb{R}_2[X] = \dim(\ker f) + rg\ f \Rightarrow rg\ f = 2$$

2.4 Endomorphisme, isomorphisme, automorphisme

Endomorphisme

Definition

Une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel E est appelée *endomorphisme*.

L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\boldsymbol{L}(E)$ oubien $Endo(E)$.

Exemple

1. L'application

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & u=(x,y) & \to & f(u)=f(x,y)=(2x-y,x+y) \end{array}$$

est un endomorphisme.

Isomorphisme

Definition

Une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F qui est bijective est appélée *isomorphisme.*

L'ensemble des isomorphismes de E dans F est noté $\boldsymbol{Iso}(E,F)$.

Exemple

1. L'application

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & u=(x,y) & \to & f(u)=f(x,y)=(x+y,x-y) \end{array}$$

est un isomorphisme $(injective + surjective)$

2. L'application

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & u=(x,y) & \to & f(u)=f(x,y)=2y \end{array}$$

n'est pas un isomorphisme ($f(1,3)=f(2,3)$ mais $(1,3)\neq(2,3)$)

Définition

Etant donné $f: E \to F$ un isomorphisme. Alors L'application $f^{-1}: F \to E$ qui à y dans F associe l'unique $x\in E$ tel que $f(x)=y$ est appelée *bijection réciproque* de f.

Exemple

1. L'application l'inverse de

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & u=(x,y) & \to & f(u)=f(x,y)=(x+y,x-y) \end{array}$$

est

$$
\begin{array}{llcl}
f^{-1}: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\
 & v=(a,b) & \rightarrow & f^{-1}(v)=f^{-1}(a,b)=\left(\frac{a+b}{2},\frac{a-b}{2}\right)
\end{array}
$$

Proposition

Soit $f: E \rightarrow F$ une application bijective, et $f^{-1}: F \rightarrow E$ sa bijection réciproque.

1. f^{-1} est bijective, et sa bijection réciproque est f.

2. $f^{-1} \circ f = I_E$ et $f \circ f^{-1} = I_F$.

Automorphisme

Definition

Une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel E (Endomorphisme) qui est bijective est appélée *automorphisme*.

L'ensemble des automorphismes de E est noté $\boldsymbol{Aut}(E)$.

Exemple

1. L'application

$$
\begin{array}{llcl}
f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\
 & u=(x,y) & \rightarrow & f(u)=f(x,y)=(x+y,x-y)
\end{array}
$$

est un automorphisme.

Proposition

Soit f une application linéaire de E dans F avec $dim\ E = dim\ F = n$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
f \text{ est un isomorphisme} & \Longleftrightarrow & f \text{ est surjective} \\
 & & \Updownarrow \\
 & & f \text{ est injective} \\
 & & \Updownarrow \\
 & & dim\,(Imf) = dimF \\
 & & \Updownarrow \\
 & & Imf = F \\
 & & \Updownarrow \\
 & & dim\,(\ker f) = 0 \\
 & & \Updownarrow \\
 & & \ker f = \{0_E\}
\end{array}$$

2.5 Exercices

2.5.1 Exercices corrigés

Exercice 1

Soit l'application f définie de IR^2 dans IR^2 par :

$$f(x, y) = (2x - 4y, x - 2y)$$

1 Montrer que f est linéaire.

2 Déterminer $\ker f$, et Imf et donner leurs dimensions

3. f est-elle bijectives ?

Correction

1.a. Pour tous $u = (x, y), v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$:

On a

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f((x,y) + (x', y')) \\ &= f(x + x', y + y') \\ &= (2(x + x') - 4(y + y'), (x + x') - 2(y + y')) \\ &= (2x - 4y, x - 2y) + (2x' - 4y', x' - 2y') \\ &= f(u) + f(v) \end{aligned}$$

1.b. Pour tous $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^2, \ \lambda \in K$

On a

$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= f(\lambda(x, y)) \\ &= f(\lambda x, \lambda y) \\ &= (2\lambda x - 4\lambda y, \lambda x - 2\lambda y) \\ &= \lambda(2x - 4y, x - 2y) \\ &= \lambda f(u) \end{aligned}$$

donc f est une application linéaire

2 Déterminons ker f, et Imf et donner leurs dimensions,

Le noyau

$$
\begin{aligned}
&\ker f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad f(x,y) = 0\}\\
&\ker f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad (2x-4y, x-2y) = (0,0,0)\}\\
&\ker f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad \begin{cases} 2x-4y=0 \\ x-2y=0 \end{cases}\right\}\\
&\ker f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad x-2y = 0\}\\
&\ker f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad x = 2y\}\\
&\ker f = \{(2y,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad y \in \mathbb{R}\}\\
&\ker f = \{y\,(2,1) \in \mathbb{R}^2 / \quad y \in \mathbb{R}\} \quad [f \text{ n'est pas injective}]\\
&\text{Et } dim\ \ker f = 1
\end{aligned}
$$

L'image

$$
\begin{aligned}
&Imf = \{f(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\}\\
&Imf = \{(2x-4y, x-2y) / \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\}\\
&Imf = \{(2x,x) + (-4y,-2y) / \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\}\\
&Imf = \{x(2,1) + y(-4,-2) / \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\}
\end{aligned}
$$

Ainsi Imf est engendré par deux vecteur qui ne sont pas libre car $(-4,-2) = -2(2,1)$ alors $dim\ Imf = 1$

Oubien

On remarque que la dimension de l'ensemble de départ est égale à la dimension de l'ensemble d'arrivée de f, alors

$$\dim(\ker f) + \dim(Imf) = dim\mathbb{R}^2 \Longrightarrow dim\ Imf = 2 - 1 = 1.$$

3. f n'est pas bijective car il n'est ni injective ni surjective

Exercice 2

Soit

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & u=(x,y,z) & \rightarrow & f(u)=f(x,y,z)=(-2x+y+z,4y,x-2y+z) \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire.

2. Donner $\ker f$, en déduire $rg\ f$.

3. Calculer Imf.

Correction

1.a. Pour tous $u=(x,y,z), v=(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$:

On a

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f((x,y,z)+(x',y',z')) \\ &= f(x+x',y+y',z+z') \\ &= (-2(x+x')+(y+y')+(z+z'),4(y+y'),(x+x')-2(y+y')+(z+z')) \\ &= (-2x+y+z,4y,x-2y+z)+(-2x'+y'+z',4y',x'-2y'+z') \\ &= f(u)+f(v) \end{aligned}$$

1.b. Pour tous $u=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \lambda \in K$

On a

$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= f(\lambda(x,y,z)) \\ &= f(\lambda x,\lambda y,\lambda z) \\ &= (-2\lambda x+\lambda y+\lambda z,4\lambda y,\lambda x-2\lambda y+\lambda z) \\ &= \lambda(-2x+y+z,4y,x-2y+z) \\ &= \lambda f(u) \end{aligned}$$

donc f est une application linéaire

2. Le noyau

$$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \quad f(x,y,z) = 0\}$$
$$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \quad (-2x+y+z, 4y, x-2y+z) = (0,0,0)\}$$
$$\ker f = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \quad \left\{ \begin{array}{l} -2x+y+z=0 \\ 4y=0 \\ x-2y+z=0 \end{array} \right. \right\}$$
$$\ker f = \{(0,0,0)\} \quad [f \text{ injective}]$$

donc $rg\ f = dim\ \mathbb{R}^3 - dim \ker f = 3$.

3. $Imf = \mathbb{R}^3$ [f surjective] d'après la question précédente, donc on peut prendre la base suivante

$$\mathcal{B}_{Imf} = \{(-2,0,1)\,(1,4,-2)\,(1,0,1)\}$$

Exercice 3

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes, on considère l'application *"décalage"* suivante

$$\begin{array}{rccl} D: & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ & P(X) & \to & D(P(X)) = P(X+1) \end{array}$$

1. L'application D est-elle linéaire ?

2. Décrire son image (ImD). Cette application est-elle un surjective ?

3. Décrire son noyau ($\ker D$). Cette application est-elle injective ?

4. L'application D est-elle un isomorphisme ? Si oui, décrire son application linéaire réciproque.

Correction

1. On a : pour toute paire P, Q de $\mathbb{R}[X]$ et pour toute paire α, βde nombres réels, on a

$$D(\alpha P + \beta Q) = (\alpha P + \beta Q)(X+1) = (\alpha P)(X+1) + (\beta Q)(X+1) = \alpha D(P) + \beta D(Q)$$

L'application D est donc linéaire.

2. Tout polynôme peut s'écrire comme l'image par D d'un autre.

Soit

$$Q(X) = b_0 + b_1X + ... + b_nX^n,$$

On considère le polynôme

$$P(X) = Q(X - 1)$$

On a alors que $Q(X) = P(X + 1) = D(P)$. L'image de l'opération de décalage est donc l'espace des polynômes tout entier

$$ImD = \mathbb{R}[X]$$

L'application D est donc injective (appelée aussi un épimorphisme).

3. On cherche les polynômes

$$P(X) = a_0 + a_1X + +a_nX^n$$

dont l'image par l'opération de décalage est nulle, i.e. $P(X + 1) = 0$.

$$\ker D = \{P(X) = a_0 + a_1X + +a_nX^n \in \mathbb{R}[X]/ \quad D(P) = 0\}$$
$$\ker D = \{P(X) = a_0 + a_1X + +a_nX^n \in \mathbb{R}[X]/ \quad P(X + 1) = 0\}$$

Ceci signifie que le polynôme $Q(X) = P(X+1) = 0$ est nul. Ainsi, $P(X) = Q(X-1) = 0$ et

$$\ker D = \{0\}$$

Comme le noyau de cette application est réduit au polynôme nul, elle est injective (appelée aussi un monomorphisme)

4. L'application de décalage est à la fois surjective et injective, donc elle est bijective (appelée aussi un isomorphisme).

5. On sait que l'application réciproque de D est encore linéaire. Il est facile de voir que cette application réciproque est donnée par le décalage inverse :

$$\begin{array}{rccl} D^{-1}: & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ & Q(X) & \to & D^{-1}(Q(X)) = P(X-1) \end{array}$$

Il s'agit bien d'une application linéaire, par les mêmes arguments qu'à la première question

Exercice 4

Soit $E = C^{\infty}(\mathbb{R})$ et Φ une application linéaire avec

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & E = C^{\infty}(\mathbb{R}) & \to & E = C^{\infty}(\mathbb{R}) \\ & f & \to & \Phi(f) = f\prime \end{array}$$

1. Quel est le noyau de Φ ?

2. Quelle est son image ?

3. Φ est-elle injective ? surjective ?

Correction

1. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a sa dérivée nulle si et seulement si elle est constante. *Le noyau* de Φ est donc l'ensemble des fonctions constantes.

2. D'autre part, si g est une fonction de classe $C^{\infty}(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$, alors elle admet une primitive f qui est donc elle aussi de classe $C^{\infty}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire élément de E. On a alors $\Phi(f) = g$, ce qui signifie que

$Im(\Phi) = E$.

3.a $\ker(\Phi) = \{f \in C^{\infty}(\mathbb{R})/ \quad f \text{ est constante}\}$, donc Φ n'est pas injective

3.b.De la deuxième question $Im(\Phi) = E$. donc Φ est surjective.

Exercice 5

Soit f un endomorphisme de E un espace vectoriel.

1. Montrer que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$.

2. Montrer que $Im(f^2) \subset Im(f)$.

Correction

1. Soit $x \in \ker(f)$, $f(x) = 0_E$, donc $f^2(x) = f(f(x)) = f(0_E) = 0_E$ donc $x \in \ker(f^2)$, ce qui montre que

$$\ker(f) \subset \ker(f^2)$$

2. Soit $y \in Im(f^2)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f2(x) = f(f(x))$, autrement dit il existe $x\prime = f(x)$ tel que $y = f(x\prime)$, ce qui montre que $y \in Im(f)$.

Exercice 6

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $u, v \in \boldsymbol{L}\,(E, F)$.

1. Montrer que $rg(u + v) \leq rg(u) + rg(v)$.

2. En déduire que$|rg(u) - rg(v)| \leq rg(u + v)$.

Correction

1. Par la formule

$$\dim(G + H) = \dim(G) + \dim(H) - \dim(G \cap H),$$

On sait que $\dim(G + H) \leq \dim(G) + \dim(H)$. Pour $G = Imu$ et $H = Imv$ on obtient :

$$\dim(Imu + Imv) \leq \dim Imu + \dim Imv$$

Or $Im(u + v) \subset Imu + Imv$. Donc

$$rg(u + v) \leq rg(u) + rg(v)$$

2. On applique la formule précédente à $u + v$ et $-v$:

$$rg((u + v) + (-v)) \leq rg(u + v) + rg(-v)$$

Or $rg(-v) = rg(v)$ donc $rg(u) \leq rg(u + v) + rg(v)$. Donc $rg(u) - rg(v) \leq rg(u + v)$.

On recommence en échangeant u et v pour obtenir :

$$|rg(u) - rg(v)| \leq rg(u + v).$$

2.5.2 Exercices supplémentaires

Exercice1

Déterminer si les applications fi suivantes sont linéaires :

1. $\begin{cases} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \to & (3x+y, x-y) \end{cases}$

2. $\begin{cases} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \to & (xy, -x, y) \end{cases}$

3. $\begin{cases} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \to & (3x+y+z, y-z, x+y) \end{cases}$

4. $\begin{cases} f: & \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & P & \to & (P(-1), P(0), P(1)) \end{cases}$

Exercice 2

Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & u = (x,y,z) & \to & f(u) = f(x,y,z) = (x+y+z, 2x+y-z) \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire.

2. Déterminer $\ker f$.

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}n[X]$ l'espace vectoriel de polynômes de degré inférieur ou égale à n et $f: E \to E$ définie par :

$$f(P) = P + (1-X)P\prime$$

1 Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}n[X]$

2 Déterminer une base de Imf.

3 Déterminer une base de $\ker f$.

4 Montrer que Imf et $\ker f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}n[X]$

Exercice 4

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= 2e_1 + e_2 + 3e_3 \\ f(e_2) &= e_2 - 3e_3 \\ f(e_3) &= -2e_2 + 2e_3 \end{aligned}$$

1. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur. Déterminer l'image par f du vecteur u. (Calculer $f(u)$).

2. Soient

$$\begin{aligned} E = &\ \{u \in \mathbb{R}^3, f(u) = 2u\} \\ F = &\ \{u \in \mathbb{R}^3, f(u) = -u\} \end{aligned}$$

Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer une base de E et une base de F.

4. Y a-t-il $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?

Exercice 5

Soit f un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E.

Montrer que

1. $Imf \cap \ker f = \{0_E\} \Longleftrightarrow \ker f = \ker f^2$.

2. $E = Imf + \ker f \Longleftrightarrow Imf = Imf^2$.

Exercice 6

Soient f et g deux endomorphismes de E tels qu

$$f \circ g = g \circ f$$

Montrer que $\ker f$ et Imf sont stables par g